Carnap, Rudolf

La fundamentación logicista de la matemática

La fundamentación logicista de la matemática*

El problema de la fundamentación lógica y gnoseológica de la matemática aún no ha sido completamente resuelto. Este problema preocupa intensamente a matemáticos y a filósofos, ya que una incertidumbre en los fundamentos de "la más segura de todas las ciencias" es, en efecto, extremadamente perturbadora. Se han llevado a cabo diversos intentos por resolver dicho problema; empero, puede decirse que ninguno de ellos ha efectivamente superado todas las dificultades. La solución ha sido buscada esencialmente desde tres direcciones. Sus ideas fundamentales se presentan en las tres conferencias de hoy. Estas direcciones son: el *logicismo* [*Logizismus*], cuyo principal representante es Russell, el *intuicionismo* [*lntuitionismus*], defendido por Brouwer y el *formalismo* [*Formalismus*] de Hilbert.

Dado que aquí les deseo mostrar, a grandes rasgos, las líneas fundamentales de la construcción logicista de la matemática, estimo que es menester no sólo mostrar las partes del sistema en las que ésta ha tenido un buen resultado, o al menos un éxito razonable, sino también señalar las dificultades peculiares con las que dicha construcción logicista se enfrenta.

Uno de los problemas más importantes de los fundamentos de la matemática es el de la relación entre la matemática y la lógica. El "*logicismo*" es la concepción según la cual la matemática es reducible a la lógica, de aquí que [la matemática] no sea sino una parte de la lógica. El primero en defender esta concepción fue Frege (1884).[1] Los matemáticos ingleses A. N. Whitehead y B. Russell, en su gran obra *Principia Mathematica* (1910-1913),[2] proporcionaron una construcción sistemática de la lógica y de la matemática desarrollada a partir de ella. Dividiremos la tesis del logicismo en dos sub-tesis, que serán discutidas sucesivamente: 1. los conceptos matemáticos [*mathematischen Begriffe*] son derivables de los conceptos lógicos [*logischen Begriffen*], a través de definiciones explícitas [*explizite Definitionen*]; 2. las proposiciones matemáticas [*mathematischen Sätze*] son derivables de los principios lógicos [*logischen Grundsätzen*], mediante deducciones puramente lógicas.

I. La derivación de los conceptos matemáticos

A los fines de precisar la tesis de que los conceptos matemáticos son derivables de conceptos lógicos, debemos especificar cuáles son los conceptos lógicos que ello supone. Éstos son los siguientes. En la *lógica proposicional* [*Satzlogik*], que se ocupa de las relaciones entre proposiciones no analizadas [*unzerlegten Sätzen*], los conceptos más importantes son: la negación de una oración p, "no p" (simbolizado "$\sim p$"; la disyunción de dos proposiciones, "p o q" ("$p \vee q$"); la conjunción, "p y q" ("$p \cdot q$") y la implicación, "si p entonces q" ("$p \supset q$"). Los conceptos de la *lógica de predicados* [*Funktionenlogik*][3]

* Traducción de Carnap, R. (1931), "Die logizistische Grundlegung der Mathematik", *Erkenntnis* 2: 91-105.

1 Frege, G. (1884), *Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau: W. Koebner. (Reimpreso en: Thiel, C. (1986), *Die Grundlagen der Arithmetik*, Hamburg: Felix Meiner. Versión castellana de C. Ulises Moulines: "Los fundamentos de la aritmética", en Frege, G., *Escritos filosóficos*, Barcelona: Crítica, 1996, pp. 31–144.) [N. de la T.]

2 Whitehead, A. y B. Russell (1910-1913), *Principia Mathematica*, 3 vols., Cambridge: Cambridge University Press, 2ª ed. 1925, vol. I, 1927, vols. II y III. (Versión castellana parcial de J. Manuel Domínguez Rodríguez: *Principia Mathematica (hasta el *56)*, Madrid: Parainfo, 1981.) [N. de la T.]

3 Se ha optado por traducir el término "*Funktionenlogik*" mediante la expresión "Lógica de predicados", y no mediante la expresión "Lógica funcional" o "Cálculo funcional" –tal como aparece en la traducción inglesa ("*Funtional Calculus*")–, ya que en la actualidad se utiliza

Metatheoria 10(2)(2020): 63-72. ISSN 1853-2322. eISSN 1853-2330.

son representados bajo la forma de funciones; a modo de ejemplo, "$f(a)$" (leído "f de a") significa que la propiedad f le corresponde al objeto a. Los conceptos más importantes de la *lógica de predicados* son la generalidad [*Allgemeinheit*][4] y la existencia [*Existenz*]:[5] "$(x)f(x)$" (leído como "para todo x, f de x") significa que la propiedad [*Eigenschaft*] f le corresponde a todo objeto; "$(\exists x)f(x)$" (leído como "existe un x tal que f de x") significa que la propiedad f le corresponde a al menos un objeto. Por último, se añade también el concepto de identidad: "$a = b$" significa que "a" y "b" son nombres de un mismo objeto.

Sin embargo, no todos aquellos conceptos deben ser tomados como conceptos fundamentales no definidos [*undefinierte Grundbegriffe*]; algunos de ellos se reducen a otros. Por ejemplo, "$p \vee q$" puede ser definido como "$\sim(\sim p \cdot \sim q)$" y "$(\exists x)f(x)$" como "$[\sim(x)\sim f(x)]$". La tesis logicista afirma, así, que los conceptos lógicos que se acaban de especificar son suficientes para definir todos los conceptos matemáticos, de modo que no hay conceptos matemáticos específicos que necesiten ser agregados [para la construcción de la matemática].

Ya antes de Frege, los matemáticos habían llegado a la conclusión –a partir de sus investigaciones sobre la interdependencia de los conceptos matemáticos y aun cuando, en algunos casos, no hubieran podido proporcionar definiciones precisas– de que todos los conceptos de la aritmética se reducen, finalmente, a los números naturales (i.e., los números 1, 2, 3,..., utilizados comúnmente al contar). Consiguientemente, la *tarea fundamental* que restaba para el logicismo, consistía en derivar los números naturales de los conceptos lógicos. Si bien Frege ya había encontrado una solución a este problema, Russell y Whitehead llegaron, con independencia de aquél, a los mismos resultados y, subsecuentemente, fueron los primeros en reconocer la sólida concordancia de su trabajo con el de Frege. Lo esencial a dicha solución es el correcto reconocimiento del estatus lógico de los números naturales: éstos son atributos lógicos que pertenecen, no a las cosas, sino a los conceptos. El que un determinado número, digamos el 3, sea el número de un concepto, significa que tres objetos caen bajo él, como corresponde a su número (en signos: "$3(f)$"). Podemos expresar exactamente lo mismo con la ayuda de los conceptos lógicos previamente dados. Permítase, por ejemplo, que "$2_m(f)$" signifique que al menos dos objetos caen bajo el concepto f. Ello se puede definir de la siguiente manera ("$=_{Df}$" es el signo para la definición, que se lee como: "significa por definición"):

$$2_m(f) =_{Df} (\exists x)(\exists y)[\sim(x = y) \cdot f(x) \cdot f(y)].$$

En palabras: existe un x y existe un y tal que x no es idéntico con y y f corresponde a x y f corresponde a y. De un modo análogo, para definir 3_m, 4_m, etc. Y así el número dos puede definirse como:

$$2(f) =_{Df} 2_m(f) \cdot \sim 3_m(f).$$

En palabras: bajo f caen al menos dos, pero no al menos tres, objetos. También pueden definirse fácilmente las operaciones aritméticas; por ejemplo, la adición de dos números, mediante la disyunción de dos conceptos excluyentes. Más aún, puede ser definido [N. de la T.: en el original "es derivado": "*abgeleitet*"] el concepto mismo de número natural.

La derivación [*Ableitung*] de los otros tipos de números –los números positivos y los negativos, las fracciones, los números reales, los números complejos– no se lleva a cabo de acuerdo a la concepción habitual de agregar un nuevo subdominio al antiguo [dominio de los números naturales], sino

"Lógica de predicados" para hacer referencia a aquello que hacia la década de 1930 se denominaba "Cálculo lógico funcional". [N. de la T.]

[4] Se ha preferido traducir "*Allgemeinheit*" como "generalidad" –y no como "universalidad", tal como hace la traducción inglesa ("*Universality*")– para subrayar que en el presente artículo Carnap retoma la terminología con la que Frege (1879) introduce seminalmente aquello que posteriormente ha sido denominado "cuantificador universal" ("*der Allquantor*") y que dio lugar al surgimiento de la ulteriormente llamada "Lógica de predicados de primer orden". Ver Frege, G. (1879), *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle: Louis Nebert. (Reimpreso en: Angelelli, I., *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, Hildesheim: Olms, 1964, pp. v-88. Versión castellana de Hugo Padilla: *Conceptografía, un lenguaje de fórmulas, semejante al de la aritmética, para el pensamiento puro*, México: UNAM, 1972.) [N. de la T.]

[5] Se ha optado por traducir "*Existenz*" mediante el término "existencia" y no mediante "existencial", aun cuando Carnap lo utilice para referirse a lo que actualmente se denomina "cuantificador existencial", dado que en tanto no habla de "cuantificador", "operador" o "functor" no correspondería el adjetivo "existencial". [N. de la T.]

mediante la construcción de un dominio completamente nuevo. Los números naturales no constituyen un subconjunto de las fracciones, sino que están meramente correlacionados con ciertas fracciones; el número natural 3 y la fracción $^{3}/_{1}$, así, ya no son idénticos sino sólo una correlación de uno con otro. Del mismo modo, debe distinguirse la fracción ½ y el número real correlacionado con ella.

Aquí vamos a hablar sólo de la definición de los *números reales*; la derivación de los otros tipos de números no presenta dificultades de principio. Sin embargo, debe admitirse declaradamente que el problema de [la derivación de] los números reales hasta ahora no ha sido resuelto completamente por ninguna de las tres corrientes.

Supongamos que ya hemos construido la serie de las fracciones (en orden de magnitud); la tarea, por lo tanto, consiste en proporcionar definiciones de los números reales sobre la base de aquella serie de fracciones. Algunos de los números reales, esto es, los racionales, corresponden a las fracciones mismas; los restantes números reales, los irracionales, corresponden, como Dedekind (1872)[6] ha mostrado, a una "laguna" [*Lücke*] en la serie de las fracciones. Si se dividen, por ejemplo, las fracciones (positivas) en dos clases, la clase de aquellas cuyo cuadrado es inferior a 2, y la clase que comprende el resto de las fracciones, se obtiene mediante esta clasificación una "cortadura" [*Schnitt*] en la serie de las fracciones que corresponde al número real irracional $\sqrt{2}$. Esta cortadura es llamada "laguna" ya que ninguna fracción se corresponde con ella. En tanto no hay ninguna fracción cuyo cuadrado sea igual a dos, la "subclase" ["*Unterklasse*"] no contiene un miembro mayor, mientras que la "superclase" ["*Oberklasse*"] no contiene una fracción menor. De esta manera, a cada número real le corresponde una cortadura en la serie de las fracciones, esto es, a cada número real irracional le corresponde una laguna. Russell se basó en tales consideraciones de Dedekind. Dado que cada cortadura es determinada exclusivamente por su subclase, Russell define cada número real como la subclase de su correspondiente cortadura en la serie de las fracciones. Así, por ejemplo, $\sqrt{2}$ se define como la clase (o propiedad) de aquellas fracciones cuyo cuadrado es menor que dos, y el número real racional $^{1}/_{3}$ como la clase de todas las fracciones que son menores que la fracción $^{1}/_{3}$. Sobre la base de esta definición, se puede erigir la totalidad de la aritmética de los números reales. Ello, empero, tropieza con ciertas dificultades –vinculadas a las llamadas "definiciones impredicativas" [*nichtprädikativen Begriffsbildungen*]– que se discutirán más adelante.

Lo esencial del presente método logicista de introducción de los números reales es que los números *no son* "*postulados*", sino "*construidos*". La existencia de estructuras que tienen las propiedades de los números reales no se establece merced a postulados o a axiomas sino que, mediante definiciones explícitas, se construyen estructuras lógicas que tienen, en base a estas definiciones, aquellas propiedades de los números reales en la aritmética. Una definición no es una creación, sino sólo una denominación de algo cuya existencia ya ha sido probada; no hay "definiciones creativas" ["*schöpferischen Definitionen*"]. Esta concepción "*constructivista*" es una de las tendencias básicas del logicismo.

Los conceptos matemáticos restantes –tanto los conceptos de análisis (i.e., convergencia, límite, continuidad, diferencial, cociente, integral, etc.), como los de la teoría de conjuntos (especialmente los conceptos de cardinal transfinito y ordinal)– son introducidos de un modo igualmente constructivista.

II. La derivación de las proposiciones matemáticas

La *segunda parte de la tesis* del logicismo es que *las proposiciones matemáticas* son deducibles de los principios lógicos, mediante el auxilio de las operaciones lógicas de deducción. El sistema de principios lógicos que se requiere para ello, resulta de una simplificación del sistema de Russell; tal sistema contiene cuatro principios de la lógica proposicional y dos de la lógica de predicados; sus reglas de inferencia son la regla de sustitución y la regla de implicación (el *modus ponens* de la lógica antigua).

6 Dedekind, R. (1872), *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig: Vieweg. [N. de la T.]

Incluso Hilbert y Ackermann adoptaron dichos principios y reglas de inferencia como base de su [sistema de] lógica.

Los conceptos matemáticos se introducen a través de las definiciones explícitas. Una definición explícita no es más que la estipulación de un nuevo modo de escribir [*Schreibweise*], generalmente más abreviado; de acuerdo con esta estipulación, el nuevo modo de escribir puede ser siempre eliminado. Por lo tanto, toda proposición matemática puede ser retraducida a una proposición que contenga únicamente los conceptos fundamentales de la lógica previamente mencionados. Así, la segunda parte de la tesis puede formularse de la siguiente manera: toda proposición matemática demostrable es retraducible a [otra] proposición que consta únicamente de signos lógicos fundamentales y es demostrable en el seno de la lógica.

Sin embargo, la derivación de las proposiciones matemáticas enfrenta al logicismo a diversas *dificultades*. En primer lugar, resulta que algunas proposiciones de la aritmética y la teoría de conjuntos, si se las interpreta del modo habitual, requieren para su prueba no sólo de los principios lógicos sino, además, de principios especiales como el *axioma de infinito* [*Unendlichkeitsaxiom*] y el *axioma de elección* [*Auswahlaxiom*] (o axioma multiplicativo [*Multiplikationsaxiom*]). Según el axioma de infinito, para todo número natural cualquiera, existe otro número natural mayor que él; según el axioma de elección, para todo conjunto de [i.e., cuyos elementos sean] conjuntos disjuntos, no vacíos, existe (al menos) un conjunto de elección [*Auswahlmenge*], i.e., un conjunto que tiene exactamente un elemento en común con cada uno de los elementos del conjunto. De momento, nosotros no estamos interesados en el contenido de estos dos axiomas, sino en su carácter lógico: ambos son proposiciones de existencia [*Existenzsätze*]. Por lo tanto, Russell estaba en lo cierto al dudar en presentarlos como principios lógicos, puesto que la lógica trata exclusivamente con entidades posibles y no debe hacer afirmaciones acerca de si algo existe o no. Russell halló una manera de salirse de tal dificultad. Él consideró que en tanto la matemática es también una ciencia puramente formal, ella puede asimismo hacer afirmaciones de manera condicional, no en sentido absoluto, acerca la existencia: si existen ciertas estructuras, entonces existen también otras estructuras cuya existencia se deriva lógicamente de la existencia de aquellas. Consecuentemente, transformó una proposición matemática, por ejemplo S, la cual requiere para su demostración del axioma de infinito, I, o del axioma de elección, E, en un enunciado condicional; así, se considera que [S] no afirma S sino $I \supset S$ o $E \supset S$ respectivamente. Este enunciado condicional se deriva entonces de los principios de la lógica.

Una mayor dificultad, quizás la dificultad fundamental en la construcción [logicista] de las matemáticas, se relaciona con otro axioma proporcionado por Russell: el llamado *axioma de reducibilidad*.[7] Éste ha sido el mayor obstáculo para los críticos del sistema de *Principia Mathematica*, y con razón. Estamos de acuerdo con los enemigos del logicismo en que es inadmisible tomarlo como un axioma. Ciertamente, como se discutirá en detalle más adelante, la laguna que surge si se erradica dicho axioma, aún no ha sido completada de una manera completamente satisfactoria. Esta seria dificultad se vincula a la "*teoría de los tipos*" ["*Typentheorie*"] de Russell, cuyos rasgos principales queremos presentar a continuación.

Debemos distinguir una "teoría simple de los tipos"[8] ["*einfache Typentheorie*"] de una "teoría ramificada de los tipos"[9] ["*verzweite Typentheorie*"]. Esta última, elaborada por Russell, fue empero ulteriormente reconocida por Ramsey como una complicación innecesaria de la primera.[10]

[7] El *axioma de reducibilidad* es introducido por Russell en Russell, B. (1908), "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types", *American Journal of Mathematics* 30: 222-262. (Reimpreso en: van Heijenoort, J. (1967), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931*, Cambridge, MA: Harvard University Press, pp. 150-182.) [N. de la T.]

[8] La "teoría simple de los tipos" se encuentra formulada en Russell, B. (1903), *The Principles of Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press. (Versión castellana de Juan Carlos Grimberg, *Los principios de la matemática*, Buenos Aires: Espasa Calpe, 1948.) [N. de la T.]

[9] La "teoría ramificada de los tipos" se encuentra bosquejada en Russell (1908) y desarrollada en la primera edición del primer volumen de Whitehead & Russell (1910). [N. de la T.]

[10] Ver Ramsey, F. P. (1926), "The Foundations of Mathematics", *Proceedings of the London Mathematical Society* (Series 2) 25(1): 338-384. (Versión castellana de María José Frápolli: "Los fundamentos de la matemática", en *Frank Plumpton Ramsey: Obra filosófica completa* (ed. por M. J. Frápolli), Granada: Comares, 2005, pp. 113-177.) [N. de la T.]

Si, en pos de mayor simplicidad, nos limitamos a predicados monádicos (propiedades) [*einstellige Funktionen (Eigenschaften)*], absteniéndonos así de predicados poliádicos (relaciones) [*mehrstelligen Funktionen (Beziehungen)*], entonces la teoría de los tipos consiste en la siguiente clasificación de expresiones en diferentes "tipos": al tipo 0 pertenecen los nombres de los objetos ("individuos") del dominio de discurso (por ejemplo, *a*, *b*,...). Al tipo 1 pertenecen las propiedades de tales objetos (por ejemplo, *f*(*a*), *g*(*a*),...). Al tipo 2 pertenecen las propiedades de tales propiedades (por ejemplo, *F*(*f*), G(*f*),...; a éste pertenece, p.e., el concepto 2(*f*) definido anteriormente). Al tipo 3 pertenecen las propiedades de propiedades de propiedades, y así sucesivamente. Así, la regla fundamental de la teoría de los tipos es: cada concepto pertenece a un tipo determinado y puede ser aplicado significativamente sólo a expresiones del tipo inmediatamente inferior. De ello se sigue que proposiciones de la forma *f*(*a*), *F*(*f*), 2(*f*) tienen siempre significado [*sinnvoll*], i.e., son verdaderas o falsas; sin embargo, combinaciones como *f*(*g*), *f*(*F*), no son ni verdaderas ni falsas sino sinsentidos [*sinnlos*]. En particular, expresiones como *f*(*f*) o ~*f*(*f*) no tienen sentido; i. e., no se puede decir con sentido de una propiedad que se aplica a sí misma o que no se aplica a sí misma. Esta última consecuencia, como veremos, es importante para la eliminación de las antinomias.

Con esto se delinean las características principales de la teoría simple de los tipos que la mayoría de los representantes de la lógica moderna considera legitimada y necesaria. En su sistema, Russell introdujo la teoría ramificada de los tipos; sin embargo, en la actualidad la misma suele ser rechazada. En tal teoría, las propiedades de cada tipo se dividen en "órdenes" [*Ordnungen*]; esta clasificación no se basó en el tipo de objetos al que corresponde la propiedad sino en la forma de la definición que la introduce. Más adelante vamos a discutir las razones por las que Russell consideró necesario llevar a cabo la ramificación. Como resultado de la introducción de la teoría ramificada de los tipos, surgieron ciertas dificultades en la construcción de las matemáticas, en particular en la teoría de los números reales. Muchos de sus teoremas fundamentales no sólo no podían ser demostrados, sino que ni siquiera podían ser expresados. Russell superó esta dificultad por medio de un *tour de force*, vale decir, mediante la introducción del axioma de reducibilidad [*Reduzibilitätsaxioms*], en virtud del cual los diversos órdenes de un tipo podrían reducirse en ciertos aspectos al orden inferior del tipo. La única justificación para este axioma era, sin embargo, el hecho de que no había ninguna otra manera de salir de esta particular dificultad generada por la teoría ramificada de los tipos. Ulteriormente, en la segunda edición de *Principia Mathematica* (1925), y a raíz de las duras críticas de Wittgenstein, Russell abandona el axioma de reducibilidad. Él creía, empero, que no podía prescindir de la teoría ramificada de los tipos y admitía la perplejidad de la situación. De este modo, se pone aquí de manifiesto lo importante que hubiera sido, no sólo para logicismo sino para cualquier intento de solucionar el problema de la fundamentación de la matemática, demostrar que la teoría simple de los tipos es suficiente. Ramsey, un joven matemático inglés, estudiante de Russell –muerto, por desgracia, este año–, toma esta dirección en 1926; de ello hablaremos a continuación.

III. El problema de la definición impredicativa

A los fines de determinar si la teoría simple de los tipos es suficiente o si, en cambio, es necesario ramificarla, debemos examinar, en primer lugar, las razones que llevaron a Russell a adoptar su ramificación a pesar de sus consecuencias sumamente indeseadas. Encontramos dos razones estrechamente relacionadas entre sí: la necesidad de eliminar las antinomias lógicas y el llamado "principio del círculo vicioso" [*circulus-vitiosus-Prinzip*].[11]

Llamamos "*antinomias lógicas*" ["*logische Antinomien*"] a las contradicciones que surgieron por primera vez en la teoría de conjuntos (como las llamadas "paradojas"), pero que, sin embargo, según

[11] Russell ofrece diversas formulaciones del denominado "principio del círculo vicioso", sobre la base de las consideraciones ofrecidas por Poincaré en Poincaré, H. (1906), "Les mathématiques et la logique", *Revue de métaphysique et de morale* 14: 294-317. Ver, a modo de ejemplo, Russell, B. (1906), "Les paradoxes de la logique", *Revue de métaphysique et de morale* 14: 627-650 (versión inglesa: "On 'insolubilia' and their Solution by Symbolic Logic", en Russell, B. (1973), *Essays in Analysis* (ed. por D. Lackey), New York: George Braziller, pp. 190-214) y Whitehead & Russell (1910), vol. I. [N. de la T.]

Russell demostró, son de carácter lógico en general: tales contradicciones surgen en la lógica misma aún si no se presupone teoría de tipos alguna. La antinomia más sencilla es la del término "impredicable" [*imprädikabel*]. Por definición: una propiedad es "impredicable" cuando no pertenece a sí misma. Ahora bien, ¿es la propiedad "impredicable" ella misma impredicable? Si suponemos que sí, entonces se aplica a sí misma, por lo que, conforme a la definición de "impredicable", sería ella misma no impredicable. Si suponemos que no, entonces no se aplica a sí misma, por lo que, por la definición de "impredicable", sería ella misma impredicable. De acuerdo al principio de tercero excluido, es impredicable o no lo es; empero, en ambos casos se llega a una contradicción. Otro ejemplo lo constituye la antinomia, ofrecida por Grelling,[12] del concepto "heterológico" [*heterologisch*]; éste es completamente análogo al anterior, aunque no se refiere a propiedades sino a predicados. Por definición, un predicado es "heterológico" si la propiedad designada por tal palabra no pertenece al predicado mismo. (Por ejemplo, el término "monosilábico" es "heterológico", dado que el término mismo no es monosilábico.) Es evidente que tanto el suponer que el término "heterológico" es él mismo heterológico como el suponer lo opuesto llevan a una contradicción. Russell y otros lógicos construyeron numerosas antinomias de este tipo.

En la actualidad, Ramsey ha mostrado que las antinomias se dividen en dos tipos completamente diferentes. Aquellas que pertenecen al primer tipo se pueden representar por medio de signos lógicos; éstas son denominadas "antinomias lógicas" (en sentido estricto). La mencionada antinomia "impredicable" se encuentra entre las de este tipo. Ramsey demostró que este tipo de antinomia se elimina con la teoría simple de los tipos. El concepto "impredicable", por ejemplo, no se puede definir si se asume la teoría simple de los tipos, dado que, una expresión de la forma "una propiedad que no se aplica a sí misma", ($\sim f(f)$), carece de sentido y [conforme a la teoría N. de la T.] resulta inadmisible.

Las antinomias del segundo tipo son las denominadas "semánticas" ["*semantische*"] o "epistemológicas" ["*epistemologische*"]. Las mismas incluyen la anteriormente mencionada antinomia [del concepto] "heterológico", así como también la antinomia, bien conocida por los matemáticos, del número natural más pequeño que no se puede definir en alemán con menos de 100 caracteres. Ramsey mostró que las antinomias de este segundo tipo no pueden ser construidas en el lenguaje simbólico de la lógica, y por ello no es necesario considerarlas en la construcción de la matemática a partir de la lógica. El hecho de que ellas surjan en el lenguaje ordinario llevó a Russell a introducir ciertas restricciones especiales en la lógica en pos de su eliminación, precisamente esa es la teoría ramificada de los tipos. Sin embargo su origen tal vez se deba sólo a un defecto de nuestro lenguaje ordinario cotidiano.

Dado que las antinomias del primer tipo ya han sido eliminadas por la teoría simple de los tipos y las del segundo tipo no aparecen en la lógica, Ramsey declaró que la teoría ramificada de los tipos y, por lo tanto, el axioma de reducibilidad, son superfluos.

Ahora bien, ¿qué sucede con la segunda razón de Russell para ramificar la teoría de los tipos, esto es, con el principio del círculo vicioso? Este principio afirma: "Ninguna totalidad puede contener miembros que son definibles únicamente en términos de dicha totalidad". Dicho principio puede también ser llamado la "*prohibición de las definiciones impredicativas*" ["*verbot der nichtprädikativen Begriffsbildungen*"]; una definición se denomina "impredicativa" si define una noción en términos del conjunto al cual dicha noción pertenece. (El concepto "impredicativo" nada tiene nada que ver con el anteriormente mencionado pseudo-concepto "impredicable".) La razón principal de Russell para tal prohibición era su opinión de que la violación de la misma conllevaba el surgimiento de antinomias. Desde un punto de vista ligeramente diferente, dicha prohibición fue defendida enfáticamente antes de Russell, por Poincaré,[13] y después de Russell, por Weyl;[14] ellos señalaron que un concepto definido impredicativamente carece de sentido en virtud de la circularidad de su definición. Queremos dejar en claro esta idea mediante un ejemplo.

[12] Grelling, K. y L. Nelson (1908), "Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti", *Abhandlungen der Fries'schen Schule* 2(3): 301-334. [N. de la T.]

[13] Poincaré, H. (1906), "Les mathématiques et la logique", *Revue de métaphysique et de morale* 14: 294-317. [N. de la T.]

[14] Weyl, H. (1918), *Das Kontinuum. Kritischen Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, Leipzig: Veit. [N. de la T.]

El concepto de "número inductivo" (i.e., el concepto de número natural incluyendo el cero) se puede definir del siguiente modo: un número se dice "inductivo" si posee todas las propiedades hereditarias poseídas por el cero. Una propiedad se dice "hereditaria" si siempre que pertenece al número n pertenece al número $n+1$. En signos:

$$Ind(x) =_{Df} (f)[(Her(f) \cdot f(0)) \supset f(x)].$$

A los fines de mostrar que esta definición es circular e inútil, se suele argumentar de la siguiente manera: en el *definiens* aparece la expresión "(f)", i.e., "todas las propiedades (de los números)". Pero dado que la propiedad "inductiva" corresponde a la clase de todas las propiedades, la propiedad misma a ser definida [el *definiendum*] ya está incluida de manera oculta en el *definiens*, de modo que se define en términos de sí mismo, lo cual es claramente inadmisible. Se suele decir que la falta de sentido [*die Sinnlosigkeit*] de un concepto definido impredicativamente resulta especialmente clara si uno intenta determinar su aplicación a un caso particular. De este modo, para determinar si el número tres es inductivo, se debe examinar, por definición, si toda propiedad que es hereditaria y corresponde a cero, corresponde también a tres. Pero si tengo que hacer dicho examen para cada propiedad, también lo tengo que hacer para la propiedad "inductiva" ya que, en efecto, es una propiedad de los números. Así, a los fines de determinar si el número tres es inductivo, debo asimismo determinar si la propiedad "inductiva" es hereditaria, si corresponde a cero, y por último –y este es el *quid* de la cuestión–, si corresponde a tres. Sin embargo, esto significaría que no es posible determinar si el tres es un número inductivo.

Antes de adentrarnos en la refutación que Ramsey hizo de esta línea de pensamiento, tenemos que dejar en claro cómo es que estas consideraciones llevaron a Russell a la teoría ramificada de los tipos. [Russell] argumentó del siguiente modo: dado que no es admisible definir una propiedad en términos de una expresión que refiere a "todas las propiedades", las propiedades (de tipo 1) se deben dividir [en propiedades de "primer orden" y propiedades de "segundo orden"]: al "primer orden" pertenecen aquellas propiedades cuya definición no involucra la expresión "todas las propiedades"; al "segundo orden" las que contienen en su definición la expresión "todas las propiedades de primer orden"; al "tercer orden" las que contienen en su definición la expresión "todas las propiedades de segundo orden"; etc. La expresión "todas las propiedades", sin referencia a un orden determinado, resulta inadmisible; por ello, nunca forma parte de la definición de una propiedad la totalidad a la que ella misma pertenece. La propiedad "inductiva", por ejemplo, es definida de un modo ya no predicativo sino como una propiedad de segundo orden: Un número se dice "inductivo" si posee todas las propiedades hereditarias de primer orden que corresponden a cero.

Sin embargo, esta teoría ramificada de los tipos ocasionó importantes dificultades para el tratamiento de los números reales. Como hemos visto anteriormente, un número real se define como una clase o, lo que es lo mismo, básicamente, como una propiedad de las fracciones. Por ejemplo, como ya hemos visto, $\sqrt{2}$ se define como la clase o la propiedad de aquellas fracciones cuyo cuadrado es inferior a dos. Pero en tanto la expresión "para todas las propiedades" sin referencia a un orden determinado resulta inadmisible en la teoría ramificada de los tipos, la expresión "para todos los números reales" no debe referir a todos los números reales sin más sino sólo a los números reales de un orden determinado. Al primer orden pertenecen, entonces, aquellos números reales cuya definición no contiene una expresión de la forma "para todos los números reales"; al segundo orden pertenecen aquellos que contienen dicha expresión, pero que a su vez la restrinjan a "todos los números reales de primer orden", y así sucesivamente. No hay una definición, ni un enunciado [*Sätze*], admisibles, que se refieran a todos los números reales sin más. Sin embargo, con ello se pierden muchas de las más importantes definiciones y teoremas de la teoría de los números reales. Russell no halló modo alguno de sortear dicha dificultad, una vez que hubo reconocido que su intento previo –i.e., la introducción del axioma de reducibilidad– era en sí mismo inadmisible,

Aquí yace el *problema más difícil* que enfrenta, en la actualidad, la tarea de los fundamentos de la matemática: ¿cómo desarrollar la lógica cuando, por un lado, se quiere evitar el peligro de la falta de sentido de las definiciones impredicativas y, por otro lado, se quiere construir, de una manera satisfactoria, la teoría de los números reales como clases (o propiedades) de las fracciones?

IV. Un intento de solución

Ramsey (1926)[15] delineó una construcción de la matemática en la cual trató de resolver, con audacia, aquella dificultad, declarando que las olvidadas definiciones impredicativas son perfectamente admisibles: si bien contienen un círculo, tal círculo es inocuo y no vicioso. Considérese, a modo de ejemplo, solía decir, la descripción "el hombre más alto de esta habitación". Aquí describimos algo en términos de la totalidad a la cual pertenece, y sin embargo, nadie considera inadmisible tal descripción porque la persona descripta ya existe y no resulta creada por la definición, sino sólo destacada por la descripción. Ramsey creía que ello mismo sucedía con las propiedades: la totalidad de las propiedades ya existe en sí misma; es un hecho empírico que no afecta a la lógica el que nosotros los seres humanos seamos seres finitos y que, por ello, no podamos referirnos de manera individual a cada una de estas infinitamente muchas propiedades; empero, podemos describir algunas de ellas únicamente por referencia a la totalidad de todas las propiedades.

Tal fue el motivo por el que Ramsey admitió las definiciones impredicativas. Así, consiguió avenirse con la teoría simple de los tipos y, a su vez, conservar las definiciones matemáticas necesarias, especialmente aquellas requeridas para la teoría de los números reales.

Este grato resultado es, sin duda, tentador. Sin embargo, creo que no debemos caer en la tentación de aceptar la premisa subyacente a Ramsey, i.e., que la totalidad de las propiedades ya existía con anterioridad a su caracterización por medio de la definición. Tal concepción, me parece, no está muy lejos de la creencia en un reino platónico de las ideas que existe en sí mismo, independientemente de si, y de cómo, los seres humanos finitos son capaces de pensar en él. Creo que debemos atenernos a la opinión de Frege de que en matemáticas, sólo debe ser considerado como existente aquello cuya existencia ya ha sido demostrada, y ello significa: demostrada con un número finito de pasos. En este punto también me gustaría estar de acuerdo con los intuicionistas: la finitud de cada operación lógico-matemática, cada demostración y cada definición no es requerida debido a algún hecho accidental empírico, que concierne a los humanos, sino porque es parte de la naturaleza misma de la cuestión. Es por esta actitud que la matemática de los intuicionistas ha sido denominada "matemática antropológica". Estimo que, por analogía, deberíamos llamar a la matemática de Ramsey matemática "teológica". En efecto, cuando él habla de la totalidad de las propiedades, se sitúa por encima de los límites de la realidad cognoscible y definible y, en cierto sentido, desde la perspectiva de una mente infinita que no está atada a la lamentable necesidad de construir cada estructura paso a paso.

Así podemos reformular nuestra pregunta crucial: ¿Es posible mantener el resultado de Ramsey sin adherir a su concepción absolutista? El resultado de Ramsey era el siguiente: restringir la teoría simple de los tipos y, sin embargo, permitir la definición de los conceptos matemáticos, especialmente en la teoría de los números reales. Podemos lograr tal resultado si, al igual que Ramsey, permitimos las definiciones impredicativas. Pero, ¿podemos hacer ello sin caer en el absolutismo de Ramsey? En lo que sigue intentaré dar una respuesta afirmativa a esta pregunta.

Volvamos al ejemplo de la propiedad "inductiva" para la cual dimos una definición impredicativa:

$$Ind(x) =_{Df} (f)[(Her(f) \cdot f(0)) \supset f(x)].$$

Examinemos nuevamente si el uso de dicha definición, i.e., determinando la aplicación del concepto a un caso particular, lleva efectivamente a la circularidad y por lo tanto resulta inadmisible. De acuerdo a esta definición, que el número 2 sea inductivo significa:

$$(f)[(Her(f) \cdot f(0)) \supset f(2)].$$

[15] Ver Ramsey (1925). [N. de la T.]

En palabras: vale en general que una propiedad cualquiera *f*, que es hereditaria y corresponde a cero, corresponde también a dos. Ahora bien, ¿de qué manera debe probarse semejante proposición general? Si tenemos que examinar cada propiedad, incurriríamos de hecho en una circularidad insoluble, ya que aquí también nos encontramos con la propiedad "inductiva". La comprobación de ello resulta fundamentalmente imposible y, por ello, el concepto carecería de sentido. Sin embargo la prueba de una proposición general lógica o matemática no consiste en examinar la serie de los casos particulares, dado que usualmente las definiciones impredicativas se refieren a totalidades infinitas. La idea de que debemos examinar todos los casos particulares descansa en una confusión de la generalidad "numérica" [*der „numerischen" Allgemeinheit*], que refiere a objetos ya dados, con la generalidad "específica" [*der „spezifischen" Allgemeinheit*].[1]) La generalidad específica no se determina mediante el examen de los casos particulares sino por medio de la derivación lógica de ciertas determinaciones a partir de otras. En nuestro ejemplo, que el número dos es inductivo significa que la propiedad "corresponde a dos" se sigue lógicamente de la propiedad "ser hereditaria y corresponde a cero". En signos, "$f(2)$" puede ser derivada para una arbitraria f de "$Her(f) \cdot f(0)$" mediante operaciones lógicas. Éste es de hecho el caso. En primer lugar, la derivación de "$f(0)$"de "$Her(f) \cdot f(0)$" es trivial; con ello se prueba el carácter inductivo del número cero. Los pasos ulteriores se basan en la definición del concepto "hereditario":

$$Her(f) =_{Df} (n)[(f(n) \supset f(n+1)].$$

Usando tal definición, se puede fácilmente mostrar que "$f(0 + 1)$" y por lo tanto "$f(1)$" se derivan de "$Her(f) \cdot f(0)$". Ello prueba que el número uno es inductivo. Usando este resultado y con la ayuda de la definición de herencia, podemos derivar "$f(1+1)$" y por lo tanto "$f(2)$" de "$Her(f) \cdot f(0)$". Con ello, se muestra que el número dos resulta inductivo. Así pues, vemos que la definición del carácter inductivo, aunque es impredicativa, no impide la aplicación: la demostración de que la propiedad definida se da (o no se da) en casos particulares puede llevarse a cabo; por lo tanto, la definición resulta ser significativa. Si rechazamos la idea de que es necesario examinar los casos particulares y nos percatamos de que la generalidad de una afirmación para una propiedad arbitraria no significa más que su validez lógica (más exactamente, tautológica), llegaremos a la convicción de que las definiciones impredicativas son lógicamente admisibles. Si una propiedad está definida impredicativamente, entonces la decisión de si se da, o no se da, en un caso particular, bajo ciertas circunstancias, puede ser difícil, quizás incluso imposible, si la lógica no ofrece ningún sistema de decisión. Pero de ningún modo la impredicatividad hace tales procedimientos de decisión imposibles, en principio, para todos los casos. Si la concepción aquí esbozada demuestra ser sólida, ello ayudará a que el logicismo supere su mayor dificultad, que consiste en pasar felizmente entre la Escila del axioma de reducibilidad y la Caribdis de la disgregación de los números reales en diferentes órdenes.

El logicismo, tal como ha sido aquí descrito, tiene varios puntos en común tanto con el intuicionismo como con el formalismo. Con el intuicionismo, comparte una tendencia constructivista en lo que a la definición respecta, tendencia a la que también Frege adhirió enfáticamente. Un concepto no debe ser introducido axiomáticamente sino que debe ser construido a partir de los conceptos fundamentales no definidos presupuestos, paso a paso, a través de definiciones explícitas. La admisión de definiciones impredicativas parece, a primera vista, ir en contra de esta tendencia, pero ello sólo es cierto para las construcciones de la forma propuesta por Ramsey. Al igual que los intuicionistas, reconocemos como propiedades sólo aquellas expresiones (más precisamente, expresiones cuya forma es la de una proposición con una variable libre) que están construidas en muchos pasos finitos a partir de propiedades fundamentales no definidas del dominio adecuado, conforme determinadas reglas de construcción. La diferencia, empero, radica en que nosotros no sólo consideramos válidas las reglas de construcción utilizadas por los intuicionistas (que son las del denominado "cálculo de predicados de primer orden" [*„engeren Funktionenkalküls"*], sino además, el uso

[1]) Ver Kaufmann, F. (1930), *Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung*, Leipzig/Wien: Deuticke.

de la expresión "para todas las propiedades" (las operaciones del denominado "cálculo de predicados de orden superior" ["*weiteren Funktionenkalküls*"]).

Incluso, el logicismo tiene una afinidad metodológica con el *formalismo*. El logicismo se propone construir el sistema lógico matemático de modo tal que, a pesar de que los axiomas y las reglas de inferencia sean elegidos con una interpretación determinada de los conceptos fundamentales, sin embargo, *dentro del sistema*, la cadena de las deducciones y la de las definiciones son conducidas de modo formalista, a la manera de un cálculo puro, i.e., sin referencia a los conceptos fundamentales.

Rudolf Carnap

Traducción: Valeria Sol Valiño[†‡]

† Departamento de Humanidades, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires, Argentina. Para contactar a la autora, por favor, escribir a: vvalino@economicas.uba.ar.

‡ Quiero agradecer a Javier Legris y a Pablo Lorenzano por los comentarios y sugerencias realizados a la presente traducción. [N. de la T.]